Программа факультативного курса «Равносильные уравнения»

Составитель: Ситникова Инна Сергеевна, учитель МОУ ИРМО «Хомутовская СОШ №2»

Пояснительная записка.

1. Цели и задачи.

Факультативный курс «Равносильные уравнения» направлен на формализацию и расширение ранее сформированных у учащихся представлений о равносильности уравнений, развитие интереса к предмету математики, расширение кругозора.

Логико-математический подход к формированию понятий «множество решений уравнения», «уравнение-следствие», «равносильные уравнения» обеспечивает возможность формирования понятий на осознанном уровне, способствует развитию логического мышления, получению элементарных представлений и знаний по темам «Логика высказываний», «Логическое следование», применению этих знаний на практике.

Наряду с видами уравнений ранее встречавшимися, учащиеся рассматривают иррациональные уравнения с опорой на имеющиеся у учащихся знания.

Рассматриваются новые методы решения уравнений. Предлагаемый курс позволяет внести весомый вклад в разрешение проблем в решении уравнений изучаемых в 10-11 классах.

Кроме того, данный курс способствует формированию исследовательских умений.

Цель курса: формирование понятий «равносильные уравнения» на осознанном уровне, позволяющем активно применять понятие на практике.

Задачи курса:

- формирование понятий, установление свойств понятий и овладение доказательством этих свойств;
- формирование логической культуры;
- развитие мышления, устной и письменной речи;

- развитие мотивации к учебной деятельности.

2. Актуальность.

Актуальность курса обусловлена необходимостью организации занятий направленных на формализацию и расширение представлений о равносильности, подготавливающих учащихся к дальнейшему изучению уравнений.

Факультативный курс предполагает еженедельные занятия в количестве 9 занятий объемом 12 аудиторных часов. Курс целесообразно изучать в 8-9 классах. Желательно продолжение курса по темам «Равносильные системы уравнений» и «Равносильные неравенства и неравенства-следствия».

В результате данного курса учащиеся должны уметь:

- находить множество решений уравнений;
- выявлять являются ли уравнения следствием исходного уравнения;
- устанавливать отношение равносильности уравнений;
- применять теоремы , утверждения при решении практических задач и задач на доказательство;
- грамотно оформлять записи.

3. Содержание курса.

№ занятия	**кол-во часов**	**тема**	**деятельность учащихся**
1	1	Равносильные уравнения. Проверочная работа №1. Анкета №1.	Решение заданий. Ответы в произвольной форме.
2	1	Высказывания и предложения с переменными.	Изучение теории, освоение методов решения задач.
3	2	Высказывания и предложения с переменными.	Решение задач.

4	1	Понятие о следовании и равносильности.	Изучение теории,освоение методов решения задач.
5	1	Понятие о следовании и равносильности.	Решение задач.
6	2	Равносильные уравнения и уравнения-следствия.	Изучение теории, освоение методов решения задач.
7	2	Равносильные уравнения и уравнения-следствия.	Изучение теории, освоение методов решения задач.
8	1	Равносильные уравнения и уравнения-следствия.	Решение задач.
9	1	Равносильные уравнения. Проверочная работа №2. Анкета №2.	Решение задач. Ответы в произвольной форме.

Факультативный курс прошел апробацию в МОУ Тэминская СОШ в 9 классе 2004-2005 учебном году

Занятие №1.

Тема: «Равносильные уравнения».

Форма: проверочная работа №1.

Цели: Образовательная: актуализация знаний по данной теме, выявление потенциала знаний.

Развивающая: развитие памяти, индивидуальных качеств мышления.

Воспитательная: воспитание потребности в расширении знаний, умения работать самостоятельно.

Содержание занятия:

1. Проверочная работа №1.

Задания	Ожидаемые решения, ответы
1. Является ли второе уравнение следствием первого, равносильны ли уравнения: а) $4x^2-6x+5=0$ и $2x^2+2{,}5x-3=0$ б) $x^3-4x=0$ и $x^2-4=0$	Уравнения равносильны, (1)$\Rightarrow$(2), так как уравнение (2) возможно получено из (1) делением почленно на число 2, что не нарушает равносильности. Уравнения неравносильны, (1)$\Rightarrow$(2),так как деление не переменную x ведет к нарушению равносильности.
2. Может ли произойти потеря корней уравнения или появление посторонних корней если: а) уравнение $(x^2+4)f(x)=3x^2+12$ заменить на $f(x)=3$? б) Уравнение $\frac{f(x)}{x-2}=\frac{g(x)}{x-2}$ заменить $f(x)=g(x)$?	нет, так как действие деления на выражение $(x^2+4)\neq 0$ при любых x, и имеющие смысл при любых x, не нарушает равносильности. Да, так как действие умножения на выражение $(x-2)$, которое равно нулю при $x=2$, вследствие чего уравнение (1) не имеет смысла, ведет к нарушению равносильности и возможности появления посторонних корней.
3. Решите уравнение и укажите, какое преобразование могло привести к нарушению равносильности: $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}=\frac{4-x}{x^2+2x}$	1) $\frac{2}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x(x-2)}=\frac{4-x}{x(x+2)}$ умножение на $x(x-2)(x+2)$ ведет к нарушению равносильности. 2) $2x-(x+2)=(x-2)(4-x)$ 3) $2x-x-2=4x-x^2-8+2x$

	4) $x^2 - 5x + 6 = 0$ $D = 25 - 24 = 1$ $x_1 = 2 \qquad x_2 = 3$ 5) если $x = 2$, то $2(2-2)(2+2) = 0$, если $x = 3$, то $3(3-2)(3+2) \neq 0$ Ответ: $x = 3$

Анкета №1.

1. Встречались ли вы с подобными заданиями ранее?
2. Заинтересовали ли вас данные задания?
3. Возникли ли у вас трудности при ответах на задания?
4. Считаете ли вы достаточными свои знания по способам решения уравнений и обосновании решений?
5. Считаете ли вы нужным пополнить свои знания по выполнению подобных заданий?

По результатам проведенного анкетирования, было выявлено, что:

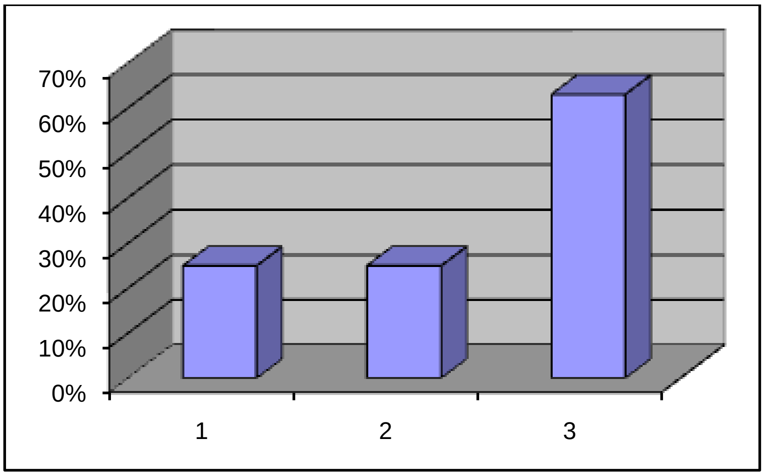
- 50% учащихся встречались с подобными заданиями,
- 88% учащихся заинтересовали данные задачи,
- 88% учащихся затруднялось при ответах на задания,

- 25% учащихся считают имеющиеся знания по решению уравнений достаточными,
- 75 % учащихся считают необходимым пополнить свои знания по выполнению подобных заданий.

Анализ проверочной работы №1.

№ задания / Ф.И. учащегося	1	2	3
1. К. Анна	+	-	+
2. К. Юлия	-	-	+
3. Л. Артем	-	+	+

4. М. Саша	-	-	-
5. Р. Женя	+	+	+
6. С. Стас	-	-	-
7. Ч. Женя	-	-	+
8. Ш. Галя	-	-	-
Итого	25%	25%	63%



В результате проведенной работы выявлено, что понятия о равносильных уравнениях, уравнениях-следствиях у учащихся не сформированы, непрочные знания о преобразованиях ведущих к нарушению равносильности и не нарушающих равносильности уравнений, уравнения решаются по привычному алгоритму, при этом учащимся трудно дать необходимые обоснования.

Занятие №2.

Тема: «Высказывания и предложения с переменными».

Цели: Образовательная: формирование понятий «конъюнкция высказываний», «дизъюнкция высказываний», «область определения предложения», «множество истинности предложения».

Развивающая: развитие качеств мышления, устной и письменной речи.

Воспитательная: привитие познавательного интереса.

Содержание занятия:

1. Теоретическая часть с элементами практики.

Рассмотреть предложение «В часе 60 минут»,«Число $4\sqrt{3}-3\sqrt{2}$ положи тельное», «Функция $y=5x$ возрастающая»,«Дробь $\frac{845}{1225}$ несократимая».

Каждое из них представляет собой некоторое высказывание, о котором можно сказать, истинно оно или ложно. Так первые три предложения являются истинными высказываниями, а последнее – ложным. Отметим, что рассмотренные высказывания простые.

Из простых высказываний с помощью связок «и» и «или» можно составить сложные высказывания.

Сложное высказывание, составленное с помощью связки «и», называется конъюнкцией высказывания. Примерами конъюнкции могут служить такие высказывания: «Число 51 кратно 17, и произведение $51\cdot 108$ кратно 17», « В году 12 месяцев, и в каждом месяце 30 дней».

Конъюнкция считается истинной, если истинно каждое из входящих в нее высказываний. В приведенных примерах первая конъюнкция истинна, так как составлена из двух истинных высказываний, а вторая ложна, так как второе из составляющих ее высказываний является ложным. Сложное высказывание, составленное с помощью связки «или» называется дизъюнкцией высказываний. В качестве примеров дизъюнкции можно привести такие высказывания: «Частное от деления 3717 на 177 является целым числом или дробным числом», «Число 10^8+1 делится на 3 или при делении на 3 дает остаток 1».

Дизъюнкция считается истинной, если истинно хотя бы одно из входящих в нее высказываний. В приведенных примерах первая дизъюнкция истинна, а вторая ложна, так как ложными являются оба входящих в нее высказывания.

Числовые равенства и числовые неравенства можно рассматривать как некоторые высказывания, которые могут быть либо истинными, либо ложными. Так равенство $1{,}2\cdot(7+4)=1{,}2\cdot 7+1{,}2\cdot 4$ является верным, то есть служит примером истинного высказывания, а неравенство $31-24<31+24$

является неверным, то есть представляет собой ложное высказывание. Из числовых равенств и неравенств можно составить сложное высказывание. Например, двойное неравенство $13<17<2$ представляет собой конъюнкцию « $13<17$ и $17<2$» и является истинным высказыванием, так как истинно каждое из входящих в него высказываний. Нестрогое неравенство $(-2{,}7)^2 \geq 0$ представляет собой дизъюнкцию «$(-2{,}7)^2 > 0$ или $(-2{,}7)^2 = 0$» и также является истинным, так как истинно первое высказывание.

Рассмотрим теперь предложение с переменной *x*:

«Целое число *x* является квадратом натурального числа». Говорят, что множество целых чисел является областью определения этого предложения.

Об этом предложении сказать истинно оно или ложно нельзя. Все зависит от конкретного значения *x*. Например, при $x=144$ получится истинное высказывание, а при $x=145$ - ложное.

Множество значений переменной, при котором предложение с переменной обращается в истинное высказывание, называется множеством истинности этого предложения, или множеством его решений.

Пусть даны предложения $A(x)$ и $B(x)$, каждое из которых определено на множестве *X*. обозначим через P_1 - множество истинности первого из них, а через P_2 - множество истинности второго. Тогда множеством истинности конъюнкции «$A(x)$ и $B(x)$», где $x \in X$, является пересечение множеств P_1 и $\mathrm{P}2$. Например:Рассмотрим предложения:1) «Двузначное число *a* делится на 2 и на 3», 2)«Двузначное число *a* делится на 2 или на 3». Множество истинности *A* первого предложения представляет собой пересечение множеств истинности двух предложений «Двузначное число *a* делится на 2» и «Двузначное число *a* делится на 3» , то есть состоит из четных двузначных чисел, кратных 3. Значит, А = {12, 18, 24, 30, …, 90, 96}. Множество истинности *B* второго предложения состоит из чисел, которые либо являются четными, либо кратны 3. Значит *B* = {10, 12, 14, 15,…, 98, 99}.

Уравнения и неравенства с переменными можно рассматривать как предложения с переменными. Множество истинности такого предложения называется, как известно, множеством решений уравнения или неравенства. Так множеством истинности предложения «$x^2-4=0$» является множество {-2; 2}, а множеством истинности предложения «$x^2-4>0$» - числовой промежуток (4; +∞).

Остановимся на уравнениях, выполним упражнения:

а) проверить является ли множество {0, 1, 2, 3} множеством истинности уравнения $x(x-1)(x-2)=0$.

В результате проверки предложение обращается в истинное высказывание только при x = 0; 1; 2, следовательно {0; 1; 2} – множество всех корней исходного уравнения.

б) найти множество истинности для предложения $2x+1=3$.

Уравнение $2x+1=3$ имеет один корень x = 1. Никакое другое число не может быть корнем, так как при других значениях высказывание ложно. Значит множество корней уравнения: {1}.

в) найти множество истинности для предложения $x+2=x+1$.

При любом значении x значение выражения $x+2$ всегда на 1 больше значения выражения $x+1$, значит множество корней уравнения пустое: {∅}

Для конъюнкции и дизъюнкции уравнений или неравенств с переменными используются специальные названия. Конъюнкцию уравнений (неравенств) называют системой и обозначают фигурной скобкой {, а дизъюнкцию уравнений (неравенств) называют совокупностью и обозначают квадратной скобкой [. Если каждое из уравнений (неравенств), входящих в систему или совокупность, определено на множестве всех чисел, то множество истинности системы представляет собой пересечение множеств истинности входящих в нее уравнений (неравенств), а множество истинности совокупности – их объединение.

Рассмотрим пример:Найти множество значений x, при которых выражение:

а) $\sqrt{3x-5}+\sqrt{8-2x}$ имеет смысл;

б) $\sqrt{15-5x}+\sqrt{x-2}$ не имеет смысл.

а) Выражение $\sqrt{3x-5}+\sqrt{8-2x}$ имеет смысл, когда имеет смысл каждый из корней, то есть, истинна конъюнкция $\sqrt{3x-5}\ge 0$ и $\sqrt{8-2x}\ge 0$. Запишем ее в виде неравенств и решим эту задачу:

$$\begin{cases}\sqrt{3x-5}\ge 0,\\ \sqrt{8-2x}\ge 0,\end{cases}\qquad \begin{cases}3x\ge 5,\\ -2x\ge -8,\end{cases}\qquad \begin{cases}x\ge 1\dfrac{2}{3},\\ x\le 4.\end{cases}$$

Множеством решений системы является пересечение множеств решений неравенств $x\ge 1\frac{2}{3}$ и $x \le 4$, т.е. числовой промежуток $\left[1\frac{2}{3},4\right]$.

Значит, множеством значений x, при которых данные выражения имеют смысл, является смысловой промежуток $\left[1\frac{2}{3},4\right]$.

б) Выражение $\sqrt{15-5x}+\sqrt{x-2}$ не имеет смысла, когда не имеет смысла хотя бы один из корней, т.е. когда истинна дизъюнкция $15\text{-}5x< 0$ или $x\text{-}2<0$.

Запишем ее в виде совокупности неравенств и найдем множество решений неравенств $x>3$ и $x<2$, т.е. объединение числовых промежутков $(-\infty;2)$ и $(3;+\infty)$.

Значит, множеством значений x, при которых данное выражение не имеет смысла служит множество $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.

2. Подведение итогов.

Занятие №3.

Тема: «Высказывания и предложения с переменными».

Цели:

Образовательная: работа по формированию конкретных понятий, отработка действий на практических заданиях.

Развивающая: развитие словесно-логического мышления, устной и письменной речи.

Воспитательная: формирование самостоятельности, инициативы, творческой активности, умения контролировать свою деятельность, оценивать ее, проявлять взаимопомощь.

Содержание занятия:

1. Актуализация знаний полученных на прошлом занятии.

Беседа с учащимися по вопросам:

Что такое высказывание?

Какими по значению бывают высказывания?

Что такое сложное высказывание? Способы образования сложных высказываний?

При каких условиях сложное высказывание истинно? ложно?

Что называют областью определения уравнения, неравенства?

Какое множество называют множеством истинности предложения? Какое множество является множеством решений уравнения, неравенства?

Что означает запись $\begin{cases} A(x) \\ B(x) \end{cases}, \left[\begin{array}{l} A(x) \\ B(x) \end{array}\right.$?

2. Практическая работа в парах.

Задания	Примерные решения, ответы
№1. Является ли истинным высказывание: а) число $6-4\sqrt{2}$ отрицательное?	$6=\sqrt{36}, 4\sqrt{2}=\sqrt{32}, \sqrt{36}>\sqrt{32} \Rightarrow 6-4\sqrt{2}>0$, высказывание не является истинным.

б) в феврале 28 или 29 дней ?	В любом случае либо первое высказывание «в феврале 28 дней», либо второе "в феврале 29 дней» истинно, следовательно истинна дизъюнкция высказываний.
в) двузначное число больше 10 и меньше 100 ?	Двузначное число может быть равным 10, в этом случае первое высказывание «двузначное число больше 10» ложно, следовательно конъюнкция высказываний ложна, т.е. не является истинной.
г) число 2565 кратно 3 и 5 ?	Число 2565, делится на 3 и делится на 5, т.е. оба высказывания истинны, следовательно конъюнкция высказываний истинна.
д) модуль любого число равен этому числу или больше его ?	Если число равно нулю или является положительным, то истинно первое высказывание, если число отрицательное, то истинно второе высказывание. В любом случае одно из высказываний истинно.
№2. При каком условии является истинным высказывание: а) каждый ученик вашего класса изучает английский и немецкий язык;	Конъюнкция высказываний истинна в том случае, когда истинны оба высказывания одновременно. Значит высказывание истинно, если каждый ученик изучает оба языка.
б) каждый ученик вашего класса изучает английский или немецкий язык;	Дизъюнкция высказываний истинна, если истинно хотя бы одно из высказываний. Значит, высказывание истинно, если каждый ученик изучает хотя бы один из языков.

№3. Не выполняя вычислений поставьте вместо * знак <, > или =, чтобы получилось истинное высказывание: а) $3^3+4^3+5^3*6^3$	$216=216 \Rightarrow$ знак $=$
б) $27814\cdot\frac{1}{7}*27814:\frac{1}{7}$	$27814:7<27814\cdot 7$, знак $<$
в) $(7{,}123\cdot 6{,}842-42)^2*0$	Знак $>$
г) $1{,}4*\sqrt{2}*1{,}5$	$1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$, знак <
№4. Найдите множество натуральных значений *n*, при которых обращается в истинное высказывание предложение: а) $25-n^2$ -натуральное число, кратное 3	{1;2;4}, т.к. $25-n^2>0$ $(5-n)(5+n)>0$ $n\in(-5;5)$ по условию $n\in(0;5)$, методом подбора находим {1;2;4}.
б) $7\cdot(n-1)$ - простое число	{2}, так как должно выполняться условие $7\cdot(n-1)=7, n=2$.
№5 Найдите множество истинности предложения: а) $15x^2-3(2x-1)=2(1{,}5-3x)$	Решая уравнение, находим его корни: x=0. Значит множество истинности {0}.
б) (x-4)(x-2)(x+8)=0	Решая уравнение, находим его корни: $x_1=4, x_2=2, x_3=-8$. Значит множество истинности {-8; 2; 4}.

в) $5-6x=(1-4x)-(3+2x)$	Уравнение не имеет корней, значит множество истинности пусто: $\{\varnothing\}$
г) $\begin{cases} 6x-12>0 \\ x\neq 8 \end{cases}$	$6x-12>0, 6x>12, x>2, x\in(2;+\infty)$ и $x\neq 8$. Конъюнкция истинна если выполняются оба условия $\Rightarrow$ находим пересечение промежутков, из чего следует $x\in(2;8)\cup(8;+\infty)$.
д) $\left[\begin{array}{l} 5x-40>0 \\ 3x+9<0 \end{array}\right.$	$5x-40>0 \quad 5x>40 \quad x>8 \quad x\in(8;+\infty)$ $3x+9<0 \quad 3x<9 \quad x<-3 \quad x\in(-\infty;-3)$ Дизъюнкция истинна, если выполняется хотя бы одно из условий, находим объединение промежутков, множество истинности: $(-\infty;-3)\cup(8;+\infty)$.
№6. Найдите множество значений *x*, при которых имеет смысл выражение: а) $\dfrac{\sqrt{x-4}}{x-8}$	Решить систему $\begin{cases} x-4\geq 0 \\ x-8\neq 0 \end{cases}$. Решение системы $[4;8)\cup(8;=+\infty)$ является множеством истинности.
б) $\dfrac{\sqrt{8-2x}+\sqrt{x-1}}{2}$	Решить систему $\begin{cases} 8-2x\geq 0 \\ x-1\neq 0 \end{cases}$,решение системы [1;4] является искомым множеством.

3. Проверка решений. Каждому из учащихся можно предложить проверить заранее записанные некоторые решения на доске, по окончанию работы дать возможность учащимся проверить свои ответы и оценить работы. По необходимости разобрать решения.

Занятие №4.

Тема: «Понятие о следовании и равносильности».

Цели:

Образовательная: введение понятий «следование», равносильность», формирование этих понятий.

Развивающая: развитие словесно-логического мышления, оперативной памяти.

Воспитательная: привитие познавательного интереса, потребность в расширении и приобретении знаний.

Содержание занятия:

1. Теоретическая часть с элементами практики.

Два предложения с одними и теми же переменными могут быть взаимосвязаны. Рассмотрим предложения: «Число x больше 4», «Квадрат числа x больше 16».

Из свойств неравенств вытекает, что если при некотором значении x первое предложение обращается в истинное высказывание, то и второе предложение также обращается в истинное высказывание. В таких случаях говорят, что из первого предложения следует второе или что второе предложение является следствием первого.

Вообще из одного предложения с переменными следует другое, если всегда, когда истинно первое предложение, оказывается истинным и второе.

Иначе говоря, из одного предложения следует другое, если множество истинности первого предложения является подмножеством множества истинности второго.

Нетрудно убедиться, что в рассмотренном примере из второго предложения не следует первое. Для этого достаточно указать хотя бы одно значение переменной x, при которой второе предложение истинно, а первое ложно. В качестве такого значения можно взять, например $x=-5$.

В задании для обозначения следования данного предложения из другого используют знак $\Rightarrow$ (знак логического следования). Например, если из предложения A следует предложение B, то это записывается так $A \Rightarrow B$.

Приведенную запись можно прочитать по разному:

«Из A следует B».

«B является следствием A».

«Если A истинно, то истинно B».

Понятие следования связано с понятиями «достаточное условие» и «необходимое условие».

Если из A следует B, то говорят, что A является достаточным условием для B, или что B является необходимым условием для A.

Например, в силу свойств делимости из предложения:

«Целое число a кратно 12»

следует предложение:

«Целое число a кратно 6»

Пользуясь терминами «достаточно» и «необходимо», это можно прочитать так:

«Для того что бы целое число a было кратно 6, достаточно чтобы оно было кратно 12»,

«Для того что бы целое число a было кратно 12, необходимо чтобы оно было кратно 6».

В рассматриваемом примере второе предложение не является следствием первого: целое число кратное 6, может быть не кратно 12, например 18. Однако возможен случай, когда из первого предложения с переменными следует второе, а из второго – первое. Примером могут служить предложения:

«Сумма цифр натурального числа x делится на 3»

«Натуральное число x делится на 3»

В силу признака делимости на 3 любое значение x, обращающее в истинное высказывание первое предложение, обращает в истинное высказывание и второе предложение и наоборот.

О таких предложениях говорят, что они являются равносильными.

Вообще если из одного предложения с переменными следует другое и из второго следует первое, то эти предложения называются равносильными.

Иначе говоря, два предложения равносильны, если множества истинности этих предложений совпадают.

В записи для обозначения равносильности используется знак $\Leftrightarrow$ (знак равносильности).

Запись $A \Leftrightarrow B$, где A и B – некоторые предложения, можно прочитать по разному:

«A равносильно B».

«A истинно тогда и только тогда, когда истинно B».

Если предложения A и B равносильны, то говорят, что A является необходимы и достаточным условием для B.

Рассмотрим, например, предложения:

«Треугольник ABC равнобедренный»,

«Треугольник ABC имеет ось симметрии».

Из первого предложения следует второе, а из второго – первое. Пользуясь терминами «необходимо» и «достаточно», это можно сформулировать так: для того чтобы треугольник ABC был равнобедренным, необходимо и достаточно, чтобы он имел ось симметрии.

2. Практическая часть.

Задания	**Примерные решения, ответы**
№1. Является ли второе предложение следствием первого (при положительном ответе сделайте запись, используя знак $\Rightarrow$): а) углы A и B вертикальные; $\angle A = \angle B$	да, (1)$\Rightarrow$(2).
б) в ΔABC $\angle A = 70^0$; ΔABC - остроугольный	нет.

№2. Следует ли второе предложение из первого; следует ли первое из второго: а) a – отрицательное число; a^3 – отрицательное число.	да, (1)⇒(2), (2)⇒(1), (1)⇔(2)
б) $a+24$ - целое число; $35-a$ - целое число.	да, (1)⇒(2), (2)⇒(1), (1)⇔(2)
№3. Равносильны ли предложения (при положительном ответе сделайте запись, используя знак⇔): а) p – целое число, кратное 3; $7p$ – целое число, кратное 3?	да, (1)⇔(2)
б) y – целое число; $\frac{5y+1}{y}$ - дробное число ?	нет, например, при $y=1$, второе число будет целым.

3. Подведение итогов. Что нового узнали? Чему научились?

Занятие №5.

Тема: «Понятие о следовании и равносильности».

Цели:

Образовательная: систематизировать знания по данной теме.

Развивающая: развитие эвристического и аналитического мышления.

Воспитательная: формирование самостоятельности, привитие познавательного интереса.

Содержание занятия:

1. Актуализация знаний. Беседа с учащимися по теории прошлого занятия.

2. Практическая работа.

Задания	**Примерные решения, ответы**
№1. Следует ли из первого предложения второе; равносильны ли эти предложения: а) целое число y кратно 6; квадрат целого числа y кратен 36;	 да, (1)$\Rightarrow$(2) да, (1)$\Leftrightarrow$(2)
б) натуральное число a оканчивается цифрой 1; четвертая степень натурального числа a оканчивается цифрой 1?	да, (1)$\Rightarrow$(2) нет, (1)$\not\Leftarrow$(2)
№2. Является ли второе предложение следствием первого: а) $ab = bc; a = c$;	нет, (1)$\not\Rightarrow$(2), пример: $2 \cdot 0 = 3 \cdot 0$, но $2 \neq 3$
б) сумма натуральных чисел a и b – нечетное число; произведение натуральных чисел a и b – четное;	да, (1)$\Rightarrow$(2),
в) a и b – иррациональные числа; ab – иррациональное число?	нет, (1)$\not\Rightarrow$(2),

	пример: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=4$
№3. Равносильны ли предложения: а) $A\subset B, A\bigcap B=A$;	да
б) $x\in A\bigcap B, x\in A$ и $x\in B$;	да
в) $x\in A\bigcup B, x\in A$ или $x\in B$?	да
№4. Вставьте пропущенную связку «и» или «или», чтобы полученное сложное предложение было равносильно данному: а) $ab=0\Leftrightarrow a=0*b=0$;	«или»
б) $ab\neq 0\Leftrightarrow a\neq 0*b\neq 0$;	«и»
в) $a^2b>0\Leftrightarrow a>0*b\neq 0$;	«и»
г) $a^2+b^2=0\Leftrightarrow a=0*b=0$;	«и»
д) $ab^2>0\Leftrightarrow a>0*b\neq 0$.	«и»
№5. Вставьте вместо многоточия одно из пропущенных слов «достаточно», «необходимо», «необходимо и достаточно» чтобы получилось истинное высказывание: а) для того чтобы число *a*, где $a\in N$, делилось на 5, …, чтобы оно оканчивалось цифрой 5;	достаточно
б) для того чтобы число *a*, где $a\in N$, делилось на 12, …, чтобы оно делилось на 3;	необходимо
в) для того чтобы число *a*, где $a\in N$, делилось на 9, …, чтобы сумма его цифр делилось на 9;	необходимо и достаточно
г) для того чтобы число *a*, где $a\in N$, делилось на 6, …, чтобы оно делилось на 2 и на 3.	необходимо и достаточно
№6. Замените многоточие словами «достаточно», «необходимо», «необходимо и достаточно» чтобы получилось истинное высказывание: а) для того чтобы углы *A* и *B* были равны, …, чтобы они	достаточно

были вертикальными;	
б) для того чтобы сумма углов A и B была равна 180^0, …, чтобы они были смежными;	достаточно
в) для того чтобы прямоугольный треугольник был равнобедренным, …, чтобы острый угол в нем был бы равен 45^0	необходимо и достаточно
№7 Верно ли, что: а) для того чтобы целое число a делилось на 4, необходимо, чтобы оно оканчивалось четной цифрой;	да
б) для того чтобы каждое из чисел a и b делилось на 17, достаточно, чтобы каждое из чисел a и b делилось на 17;	да
в) для того чтобы диагонали четырехугольника были равны, необходимо и достаточно, чтобы он был прямоугольником ?	нет

3. Работа над ошибками (по необходимости)
4. Подведение итогов темы «Понятие о следовании и равносильности».

Занятие №6.

Тема: «Равносильные уравнения и уравнения-следствия».

Цели:

Образовательная: формирование понятий «уравнение-следствие», «равносильные уравнения», умение распознавать данные уравнения.

Развивающая: формирование действий распознавания понятия и выведение следствий.

Воспитательная: воспитание внимания, мышления при решении задач.

Содержание занятия:

1. Теоретическая часть.

Выведенные понятия следования и равносильности относятся, в частности, к уравнениям и неравенствам с переменными, которые, как уже отмечалось, можно рассматривать как предложения с переменными.

Остановимся сначала на уравнениях с одной переменной.

Пусть мы имеем два уравнения с одной и той же переменной. Из первого уравнения следует второе, если каждое значение переменой, обращающее первое уравнение в верное равенство, т.е., обращает также и второе уравнение в верное равенство, т.е. если множество корней первого уравнения является подмножеством множества второго.

Например: 1) $\frac{x^2}{x+5}-\frac{25}{x+5}=0$ множество решений {5},

2) $(x-5)(x+5)=0$ множество решений {-5; 5},

$\{5\}\subset\{-5;5\},(1)\Rightarrow(2)$.

В таком случае уравнение (2) называется уравнением-следствием.

Два уравнения с одной и той же переменной равносильны, если из первого уравнения следует второе и из второго следует первое. Иначе говоря, два уравнения с одной переменной равносильны, если множества их корней совпадают, т.е. каждый корень первого уравнения является корнем второго и наоборот или оба уравнения не имеют корней.

В рассмотренном выше примере уравнения не являются равно сильными, так как $\{5\} \neq \{-5;5\}$

Выясним, в результате каких преобразований получается уравнение, равносильное исходному.

Теорема 1. Если какое-нибудь слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получится уравнение равносильное данному.

Доказательство: Докажем, что уравнения

$$f(x) = g(x) + h(x) \qquad (1)$$

и $$f(x) - h(x) = g(x) \qquad (2)$$

равносильны.

Пусть некоторое число a является корнем уравнения (1). Тогда верно числовое равенство $f(a) = g(a) + h(a)$. В этом случае верным является также числовое равенство $f(a) - h(a) = g(a)$, которое получается из предыдущего путем прибавления к обеим частям одного и того же числа. А это означает, что число a - корень уравнения (2).

Значит из уравнения (1) следует уравнение (2).

Аналогично можно показать, что из уравнения (2) следует уравнение (1).

Следовательно, уравнения (1) и (2) равносильны.

Например, уравнения $2x^2 - 3 = 4 - 5x$ и $2x^2 + 5x = 3 + 4$ равносильны. Очевидно, что из (1) можно получить (2) и наоборот, если перенести соответствующие слагаемые.

Теорема 2. Если в какой-либо части уравнения выполнить тождественные преобразования, не меняющие область определения уравнения, то получится уравнение, равносильное данному.

Доказательство: Докажем, что если выражение $h(x)$ тождественно равно $f(x)$ и имеет ту же область определения, то уравнения

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

и $$h(x) = g(x) \qquad (2)$$ равносильны.

Пусть некоторое число a - корень уравнения (1). Тогда верно равенство $f(a)=g(a)$. Выражение $h(x)$ определено при тех же значениях x, что и выражение $f(x)$ и тождественно равно ему. Поэтому $h(a)=f(a)$, и, следовательно, равенство $h(a)=g(a)$ также является верным. Отсюда получается, что из уравнения (1) следует уравнение (2).

Аналогично можно показать, что из уравнения (2), следует уравнение (1). Значит уравнения (1) и (2) равносильны.

Теорема 3. Если обе части уравнения $f(x)=g(x)$ умножить (разделить) на отличное от нуля число или выражение $h(x)$, имеющее смысл на всей области определения уравнения и не обращающиеся в нуль ни при каких значениях x, то получится уравнение, равносильное данному.

Доказательство:

Докажем, что равносильны уравнения

$$f(x)=g(x) \qquad (1)$$

и

$$f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x), \qquad (2)$$

где $h(x)$ - некоторое выражение, которое имеет смысл на всей области определения уравнения $f(x)=g(x)$ и не обращающееся в нуль ни при каких значениях x.

Пусть некоторое число a - корень уравнения (1). Тогда верно равенство $f(a)=g(a)$. Умножим обе части этого равенства на число $h(a)$, мы получим верное числовое равенство $f(a)\cdot h(a)=g(a)\cdot h(a)$, т.е число a - корень уравнения (2). Значит, из уравнения (1) следует уравнение (2). Аналогично с учетом того, что $h(a)\neq 0$, можно показать, что из уравнения (2) следует уравнение (1). Следовательно, уравнения (1) и (2) равносильны.

С помощью тех же рассуждений можно показать, что равносильность не нарушается при умножении или делении обеих частей уравнения на одно и тоже отличное от нуля число.

Решая уравнение, мы стремимся построить цепочку равносильных уравнений, чтобы прийти к уравнению, равносильному данному, корни которого можно легко определить.

Пример: решим уравнение $\frac{x^3-x+1}{2}=\frac{x(x^2+3)}{2}+\frac{x+6}{3}$.

Умножим обе части уравнения на 6: $3(x^3-x+1)=3x(x^2+3)+2(x+6)$,

раскроем скобки: $3x^3-3x+3=3x^3+9x+2x+12$,

перенесем слагаемые с переменной x в левую часть уравнения, а свободные члены в правую, изменяя при этом их знаки: $3x^3-3x^3-3x-9x-2x=12-3$,

приведем подобные слагаемые: $-14x=9$,

разделим обе части уравнения на -14: $x=-\frac{9}{14}$.

На каждом шаге мы выполняли выкладки, приводящие к равносильному уравнению. В результате получили уравнение $x=-\frac{9}{14}$, равносильное данному. Значит, данное уравнение имеет единственный корень, равный -$\frac{9}{14}$.

2. Практическая работа.

Задания	**Примерные решения, ответы**
№1. Является ли второе уравнение следствием первого; равносильны ли эти уравнения: а) $2x^2-6x-7=0$ и $x^2-3x-3{,}5=0$;	Второе уравнение можно получить из первого делением на число 2, согласно теореме 3 эти уравнения равносильны и (1)⇒(2).
б) $\frac{x^2-26x}{17}=0$ и $x^2-26x=0$?	Второе уравнение можно получить из первого домножением первого на число 17,при этом согласно теореме 2 получим уравнение равносильное исходному, значит эти уравнения равносильны и (1)⇒(2).

№2. Дайте обоснование равносильности уравнений: а) $3x-1+2-12x$ и $12x-1=2-3x$;	Уравнение первое (второе) можно преобразовать в уравнение второе (первое) с помощью переноса соответствующих слагаемых, согласно теореме 1 эти уравнения равносильны.
б) $\frac{3x-1}{6}+\frac{x}{2}=1$ и $3x-1+3x=6$;	Аналогично б) из №1 домножением на 6 получаем уравнение (2), (1)⇔(2).
в) $1{,}5x^2-4{,}5+3=0$ и $x^2-3x+2=0$;	Уравнение второе можно получить из первого делением его членов на 1,5. По теореме 3 (1)⇔(2).
г) $(3x-2)(8x^2+5)=x(8x^2+5)$ и $3x-2=x$;	Уравнение (2) можно получить уравнения (1) делением обеих частей (1)-ого уравнения на выражение $(8x^2+5)$. Данное выражение при любых значениях x имеет смысл и не обращается в нуль, согласно теореме 3, уравнения (1) и (2) равносильны.

3. Подведение итогов.

Занятие №7.

Тема: «Равносильные уравнения и уравнения-следствия».

Цели:

Образовательная: расширение знаний по теме, выявление ситуаций появления неравносильных уравнений.

Развивающая: развитие мышления, формирование таких мыслительных операций как анализ, синтез, обобщение, аналогия, концентрация.

Воспитательная: развитие познавательного интереса, потребности в расширении знаний.

Содержание занятия:

1. Актуализация знаний полученных на прошлом занятии.

2. Теоретическая часть с элементами практики.

Иногда в процессе решения от данного уравнения переходят к уравнению-следствию. При этом множество корней уравнения-следствия содержит все корни данного уравнения и, кроме того, может содержать некоторые лишние, или как их называют, посторонние, корни. Обнаружить эти посторонние корни можно с помощью числовых подстановок или каких-либо дополнительных исследований.

Рассмотрим примеры преобразований, которые могут быть связаны с появлением посторонних корней.

1. Замена уравнения $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{h(x)}{g(x)}$, уравнением $f(x)=h(x)$.

Если при некотором значении x, равном a, верно равенство $\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{h(a)}{g(a)}$, то верным является также равенство $f(a)=h(a)$. Значит, второе уравнение является следствием первого. При этом может существовать такое значение x, равное b, являющееся корнем второго уравнения, не являющееся корнем первого, так как при $x=b$ первое уравнение не имеет смысла.

Решим уравнение: $\frac{x^2}{x-10}=\frac{100}{x-10}$.

Имеем $x^2=100, \; x_1=-10, \quad x_2=10$.

Если $x=-10$, то $x-10\neq 0$; если $x=10$, то $x-10=0$.

Значит, число 10 не является корнем данного уравнения.

Уравнение имеет единственный корень: -10.

2. Возведение обеих частей уравнения в квадрат.

Пусть даны уравнения

$$f(x)=g(x) \qquad (1)$$

$$\text{и } f^2(x)=g^2(x) \qquad (2)$$

Если a - корень первого уравнения, то верно равенство: $f(a)=g(a)$. Из равенства двух чисел вытекает равенство их квадратов, т.е. $f^2(a)=g^2(a)$, а это означает, что a - корень уравнения (2). Значит, из уравнения (1) следует уравнение (2).

В тоже время из равенства квадратов не следует равенство чисел (числа могут быть противоположными). Поэтому из уравнения (2) не следует уравнение (1).

Отсюда вытекает, что если при решении уравнения использовалось возведение обоих частей уравнения в квадрат, то нужно провести дополнительное исследование, позволяющее исключить посторонние корни, если они появились.

Решим уравнение $\sqrt{3x+4}=x$.

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим: $3x+4=x^2$,

отсюда $x^2-3x-4=0$, $x_1=-1$, $\quad x_2=4$.

При $x=-1$ имеем $\sqrt{-3+4}=-1$ - неверное равенство,

при $x=4$ имеем $\sqrt{12+4}=4$ - верное равенство.

Значит, уравнение имеет единственный корень – число 4.

3. Выполнение в одной части (или в обеих частях) уравнения тождественных преобразований, приводящих к расширению области уравнения.

Если некоторое тождественное преобразование привело к расширению области определения уравнения, то мы получаем уравнение-следствие. При этом могут существовать такие значения переменной, которые являются корнями полученного уравнения, но не являются корнями исходного уравнения.

Решим уравнение: $x^2-5x+\sqrt{x-2}-\sqrt{x-2}=0$.

Выполнив приведение подобных слагаемых, получим:

$x^2-5x=0$, $x_1=0,\qquad x_2=5$.

При $x=0$ выражение $x^2-5x+\sqrt{x-2}-\sqrt{x-2}$ не имеет смысла, при $x=5$ это выражение имеет смысл.

Значит, данное уравнение имеет единственный корень – число 5.

Иногда для того, чтобы решить уравнение, его заменяют сложным предложением, которое равносильно данному уравнению или является его следствием. При переходе к сложному предложению, являющемуся следствием данного, необходимо исключить посторонние корни, если они появились. Так, например, из уравнения $f(x)g(x)=0$ в силу условия равенства нулю произведения следует дизъюнкция $f(x)=0$ или $g(x)=0$. Однако из этой дизъюнкции данное уравнение не следует. Может существовать такое значение *x*, равное *a*, при котором одно из выражений $f(a)=0$ или $g(a)=0$ равно нулю, а другое не имеет смысла. Тогда число *a* является для данного уравнения посторонним корнем.

Решим уравнение: $(0{,}2x+1{,}8)(\sqrt{x-6}-1)=0$,

имеем $0{,}2x+1{,}8=0$ или $\sqrt{x-6}-1=0$,

отсюда: $x_1=-9,\qquad x_2=7$.

При $x=-9$ выражение $(0{,}2x+1{,}8)(\sqrt{x-6}-1)$ не имеет смысла,

при $x=7$ это выражение имеет смысл.

Значит, данное уравнение имеет единственный корень – число 7.

Мы выяснили условия, при которых два уравнения с одной переменной равносильны или одно из них является следствием другого. Очевидно, что с помощью таких рассуждений можно показать, что аналогичные условия справедливы для уравнений с двумя и более переменными.

3. Практическая работа.

Задания	Примерные решения, ответы
№1. Докажите, что не являются равносильными уравнения: а) $x^2+\frac{1}{x-6}=36+\frac{1}{x-6}$ и $x^2=36$;	Уравнение $x^2=36$ имеет корни $x_1=6$ $x_2=-6$, x_1 не является решением первого уравнения, так как выражение $\frac{1}{6-6}$ не имеет смысла. Значит уравнения (1) и (2) неравносильны.
б) $x^3-4x=0$ и $x^2-4=0$;	Уравнение (1) можно представить в виде $x(x-2)(x+2)=0$, его корни $x_1=0, x_2=2, x_3=-2$, из них $x_1=0$ не является корнем (2) уравнения. Значит уравнения (1) и (2) неравносильны.
в) $\frac{x^2-25}{x-5}+2x=20$ и $x+5+2x=20$.	Корнем (2) уравнения является число 5, при котором выражение $\frac{x^2-25}{x-5}$ в (1) уравнении не имеет смысла. Значит уравнения неравносильны.

1. Подведение итогов.

Здесь можно использовать устные упражнения, например: Может ли нарушиться равносильность, если выполнить следующее преобразование:

а) в уравнении $12\cdot(x^2+x)-(x^2-x)=7$ раскрыть скобки и привести подобные члены?

б) в уравнении $\frac{x^2-3x+2}{x-2}+x+x^2=7$ дробь $\frac{x^2-3x+2}{x-2}$ сократить на $(x-2)$?

в) обе части уравнения $(3x+2)(x-4)=2(x-4)$ разделить на $(x-4)$?

г) в уравнении $x^2+\frac{1}{x-8}-\frac{1}{x-8}-16=48$ разность $\frac{1}{x-8}-\frac{1}{x-8}$ заменить нулем?

д) обе части уравнения $(3x^2+11)(2x-17)=5(3x^2+11)$ разделить на $(3x^2+11)$?

Ответы: а) нет; б) да; в) да; г) да; д) нет.

Занятие №8.

Тема: «Равносильные уравнения и уравнения-следствия».

Цели:

Образовательная: закрепить навыки и умения работы с равносильными и неравносильными уравнениями.

Развивающая: развитие мышления, устной и письменной речи, умственных действий распознавания.

Воспитательная: воспитание культуры решения задач, организованности в работе, творческого подхода к решению задач.

Содержание занятия:

1. Актуализация знаний полученных на занятиях №6, №7.
2. Практическая работа.

Задания	**Примерные решения, ответы**
№1. Объясните, какое преобразование было выполнено при переходе от первого уравнения ко второму и может ли оно привести к нарушению равносильности: а) $3x+1{,}1=6{,}8-2x$ и $3x+2x=3{,}8-1{,}1$;	Перенос слагаемых по теореме 1 не приводит к нарушению равносильности.
б) $\frac{x^2-81}{x+9}+3x^2-1=0$ и $x-9+3x^2-1=0$;	Домножали на выражение $(x+9)$, затем привели подобные слагаемые, $x+9=0$ при $x=-9 \Rightarrow$ преобразование противоречит теореме 3, ведет к нарушению равносильности.
в) $\sqrt{x^2-1}=x-2$ и $x^2-1=x^2-4x+4$.	Возвели обе части уравнения (1) в квадрат, что приводит к нарушению равносиль

	ности.
№2. Решите уравнение и докажите, что построена цепочка равносильных уравнений: а) $13-(x-1)^2+(2x-1)(x+1)=(x+2)^2$	$13-(x-1)^2+(2x-1)(x+1)=(x+2)^2$ 1) $13-x^2+2x-1+2x^2+2x-x-1=x^2+4x+4$ 2) $-x^2+2x^2-x^2+2x+2x-x-4x+13-1-1-4=0$ 3) $-x+7=0$ 4) $-x=-7$ 5) $x=7$ В 1) случае раскрыли скобки, согласно теореме 2 получили уравнение равносильное исходному. Во 2) случае перенесли слагаемые меняя знаки, по теореме 1 получили уравнение равносильное (1)-му. В 3) случае привели подобные слагаемые, по теореме 2 получили уравнение равносильное (2)-му. В 4) случае перенесли слагаемое $\Rightarrow$ уравнение (4) равносильно уравнению (3). В 5) случае разделили обе части на число $-1\neq 0$, по теореме 3 получили уравнение равносильное (4)-му.
б) $(x-1)^3-(x-2)^3=3x+26$.	При решении уравнения $x=0$. Доказательство аналогично а)
№3. Решите уравнение и укажите, какое преобразование могло привести к нарушению	

равносильности: а) $\sqrt{2x+5}=x+1$;	$\sqrt{2x+5}=x+1$ 1) $(\sqrt{2x+5})^2=(x+1)^2$ 2) $2x+5=x^2+2x+1$ 3) $-x^2+4=0$ 4) $(2-x)(2+x)=0$ 5) $x_1=2 \qquad x_2=-2$ Проверка: $x_1=2$ $\sqrt{2\cdot 2+5}=2+1,\ 3=3$ $x_2=-2$ $\sqrt{2\cdot(-2)+5}=-2+1$ $\sqrt{1}=-1$ - неверно Ответ: $x=2$ К нарушению равносильности привело воз ведение обеих частей уравнения в квадрат.
б) $\frac{8}{x}-\frac{5-x}{2}=\frac{8+3x}{x}-x$.	$\frac{8}{x}-\frac{5-x}{2}=\frac{8+3x}{x}-x$ умножаем на $2x$ $16-5x+x^2=16+6x-2x^2$ $3x^2-11x=0$ $x(3x-11)=0$ $x_1=0 \qquad 3x-11=0$ $3x=11$ $x_2=3\frac{2}{3}$ Проверка: при $x=0$ уравнение не имеет смысла $\Rightarrow$ корень уравнения $3\frac{2}{3}$. К нарушению равносильности привело дей ствие умножение на выражение $2x$.
№4. При каком условии равносильны уравнения: а) $\frac{f(x)}{2x-3}=g(x)$ и	Если равны их множества решений, то есть если $x=1{,}5$ не является корнем второго

$f(x)=g(x)\cdot(2x-3)$;	уравнения.
б) $f(x)+\sqrt{x}=g(x)+\sqrt{x}$ и $f(x)=g(x)$?	Если равны их множества решений, т.е. $x\geq 0$.
№5. Может ли произойти потеря корней или появится посторонний корень, если: а) уравнение $(x^2+4)\cdot f(x)=3x^2+12$ заменить уравнением $f(x)=3$;	Уравнение (2) получится в результате деления (1)-го на (x^2+4), $x^2+4\neq 0$ и имеет смысл при любых x. По теореме 3 уравнения (1) и (2) равносильны. Значит, потери или появления корней не будет.
б) уравнение $(x^2-7)\cdot f(x)=x-7$ заменить уравнением $f(x)=1$;	Уравнение (2) получится в результате деления (1)-го на $(x-7)$, $x-7=0$ при $x=7$, по теореме 3 уравнения (1) и (2) неравносильны, значит, возможна потеря корня.
в) уравнение $\frac{g(x)}{2x^2+3}=0$ заменить уравнением $g(x)=0$;	При домножении уравнения (1) на $2x^2+3$ получится равносильное уравнение, так как $2x^2+3\neq 0$ и имеет смысл при любых x, значит потери корней не будет.
г) уравнение $\frac{f(x)}{x-4}=\frac{g(x)}{x-4}$ заменить уравнением $f(x)=g(x)$?	При домножении уравнения (1) на $(x-4)$ получается уравнение неравносильное исходному, так как $(x-4)=0$ при $x=4$, возможно приобретение постороннего корня.
№6 Найдите множество корней уравнения, заменив его равносильной системой или совокупностью уравнений:	

а) $(x^2-9x+8)(x^2-6x-16)=0$;	$(x^2-9x+8)(x^2-6x-16)=0$ равносильно $\left[\begin{array}{l} x^2-9x+8=0 \\ x^2-6x-16=0 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \{-2;1;8\}$
б) $(x^2-x)\sqrt{x^2-1}=0$;	$\left[\begin{array}{l} x^2-x=0 \\ \sqrt{x^2-1}=0 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \{-1;0;1\}$
в) $(x^2-4)^2+(x^2-4x+4)^2=0$;	$\left[\begin{array}{l} x^2-4=0 \\ x^2-4x+4=0 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right. \{-2;2\}\cap\{2\}=\{2\} \\ x=2 \end{array}\right.$
г) $\sqrt{5x^2-x}+\sqrt{3x^2+x}=0$.	$\left\{\begin{array}{l} 5x^2-x=0 \\ 3x^2+x=0 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{1}{5} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\frac{1}{3} \end{array}\right. \end{array}\right. \left\{0;\frac{1}{5}\right\}\cap\left\{0;-\frac{1}{3}\right\}=\{0\}$

3. Подведение итогов.

Занятие №9.

Тема: «Равносильные уравнения».

Цели:

Образовательная: выяснение уровеня усвоения учащимися знаний, умений и навыков по данной теме.

Развивающая: развитие эвристического и алгоритмического мышления.

Воспитательная: вырабатывание умений самостоятельно учиться, применять знания на практике.

Содержание занятия: проверочная работа №2, анкетирование №2.

Задания	Ожидаемые решения, ответы
1. Является ли второе уравнение следствием первого, равносильны ли уравнения: а) $\frac{x^2-15x}{17}=0$ и $x^2-16x=0$;	Второе уравнение можно получить если (1) домножить на число 17, при этом равносильность не нарушается, уравнения имеют одинаковые множества решений. (1) $\Rightarrow$ (2), (1) $\Leftrightarrow$ (2).
б) $(2x-4)(3x^2+5)=(3x^2+5)\cdot x$ и $2x-4=x$;	Второе уравнение получилось из первого делением на выражение $(3x^2+5)$, которое имеет смысл при любых x и неравно нулю. По теореме 3 (1) $\Leftrightarrow$ (2), (1) $\Rightarrow$ (2).
в) $\frac{x^2-36}{x-6}+2x=10$ и $x+6+2x=10$;	Уравнение второе получается из первого домножением на $(x-6)$, $(x-6)$=0 при $x=6$ и тогда уравнение (1) не имеет смысла. (1) $\Leftrightarrow$ (2), но(1) $\Rightarrow$ (2).
г) $\sqrt{x^2-2}=x-1$ и $x^2-2=x^2-2x+1$?	Уравнение второе можно получить из первого возведением обеих частей первого в квадрат. По теореме 2 (1) $\Leftrightarrow$ (2), но (1) $\Rightarrow$ (2).
№2. Может ли произойти	

потеря корней или появление корней, если: а) уравнение $\frac{f(x)}{5+x}=\frac{g(x)}{x+5}$ заменить уравнением $f(x)=g(x)$?	Да, возможно появление посторонних корней, так как домножая на $(5+x)$ по теореме 3 получим уравнение не равносильное исходному, возможно содержащему $x=-5$, которое не является корнем исходного уравнения.
б) $f(x)(x-9)=x-9$ заменить $f(x)=1$?	Да, возможна потеря корня, так как (2) получается делением первого на $(x-9)$, $x-9=0$ при $x=9$. По теореме 3 (1) $\not\Leftrightarrow$ (2)
№3. Найдите множество корней уравнения, заменив его равносильной системой или совокупностью: а) $(2x^2+9x-5)(4x^2-1)=0$;	$\left[\begin{array}{l}2x^2+9x-5=0\\4x^2-1=0\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\x=-5\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\end{array}\right.\Rightarrow\left\{-5;-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$
б) $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2-4x+4}=0$.	$\left\{\begin{array}{l}x^2-4=0\\x^2-4x+4=0\end{array}\right.\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.\\x=2\end{array}\right.\Rightarrow\{-2;2\}\cap\{2\}=\{2\}$

Анкета №2

1. Заинтересовал ли вас факультативный курс?
2. Как вы оцениваете, научились ли вы решать задания?
3. Удалось ли вам пополнить недостающие знания?
4. Как вы думаете, пригодятся ли вам полученные знания в дальнейшей учебной деятельности?
5. Хотели бы вы пополнить знания по теории равносильности неравенств?

По результатам проведенного анкетирования, было выявлено, что:

-100% учащимся были интересны занятия курса;

-75% учащихся считают, что научились решать задания;

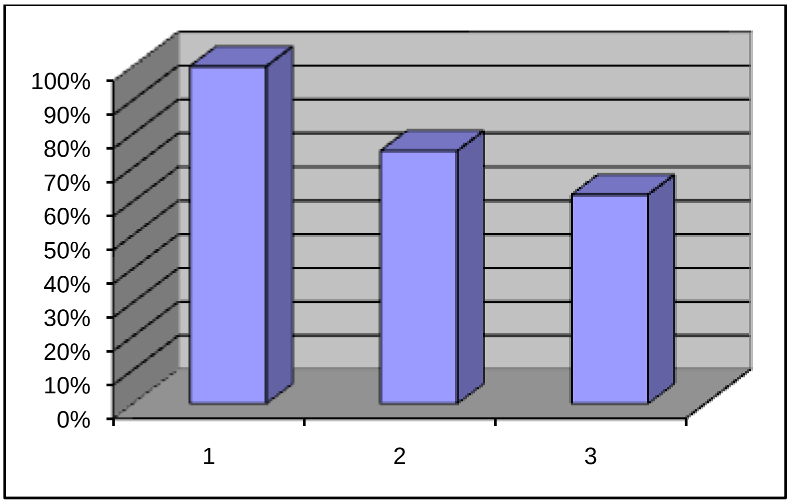
-88% учащихся считают, что им удалось пополнить недостающие знания;

-88% учащихся думают, что полученные знания им пригодятся в дальнейшем обучении;

-63% учащихся хотели бы пройти факультативный курс по теории равносильности неравенств.

Анализ выполнения проверочной работы

№ задания / Ф.И. учащегося	1	2	3
1. К. Анна	+	+	+
2. К. Юлия	+	+	+
3. Л. Артем	+	+	+
4. М. Саша	+	-	-
5. Р. Женя	+	+	+
6. С. Стас	+	+	-
7. Ч. Женя	+	+	+
8. Ш. Галя	+	-	-
Итого	100%	75%	62%



В результате прохождения факультативного курса учащиеся усвоили понятия «множество решений уравнения», «равносильные уравнения», «уравнение-следствие», осознанно оперируют данными понятиями, умеют применять теоремы равносильности, имеют представление о преобразованиях ведущих к нарушению равносильности, умеют использовать эти представления при доказательствах и исследованиях, различают систему уравнений от совокупности уравнений, имеют представление об их применимости.

Для развития полученных знаний целесообразно провести факультативные курсы по темам: «Равносильные системы уравнений», «Равносильные неравенства и неравенства-следствия».

Заключение

В результате исследований выявлено, что формирование понятия равносильности происходит постепенно: первоначальное понятие о равносильности, данное в VII классе, постепенно расширяется и дополняется в VIII – XI классах . Формирование данного понятия требует дополнительных усилий со стороны учителя, так как в популярных учебных пособиях материал излагается поверхностно, недостаточно для осознанного усвоения учащимися. Однако обучение решению уравнений требует применения данного понятия, что подтверждается достаточным количеством примеров решения уравнений разных видов.

Начинающему учителю математики будет полезно ознакомиться с изложенным в работе материалом. Последовательность, в которой ведётся исследование методики обучения преобразованиям, решению уравнений, позволяет увидеть возможности возникновения проблем в работе по данной теме, данные методические рекомендации подскажут пути их решений. Организация и проведение факультативного курса в предложенном варианте поможет устранить пробелы в знаниях учащихся и окажет несомненную помощь учителю и учащимся в дальнейшей учебной деятельности.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что поставленные нами задачи выполнены и та цель, которую мы перед собой ставили вначале работы – достигнута.

Литература :

1. Алимов М.А. и др. Алгебра 7 : Учеб. для 7 кл. общеобразовательных учреждений. - Москва: Просвещение 2002.

2. Алимов М.А. и др. Алгебра 8 : Учеб. для 8 кл. общеобразовательных учреждений.- Москва : Просвещение, 1996.

3. Алимов М.А. и др. Алгебра и начала анализа 10-11 : Учеб. для 10-11 классов общеобразовательных учреждений.- Москва : Просвещение, 1998.

4. Блох А.Я. и др. Методика преподавания математики в средней школе. Частная методика : Учебное пособие для студентов пединститутов по физ-мат. специальности.- Москва : Просвещение, 1987.

5. Епишева О.Б., Крупич В.И. Учить школьников учиться математике : Формирование приёмов учебной деятельности: Кн. для учителя.- Москва : Просвещение,1990.

6. Колмогоров А.Н. и др. Алгебра и начала анализа 10-11 : Учеб. для 10-11 классов общеобразовательных учреждений.- Москва : Просвещение, 1990.

7. Колягин Ю.М. и др. Методика преподавания математики в средней школе. Частная методика : Москва: Просвещение, 1977.

8. Литвиненко В.Н. и др. Практикум по элементарной математике : Учебное пособие для студентов педагогических институтов.- Москва : Просвещение, 1987.

9. Макарычев Ю.Н. и др. Алгебра 7 : Учеб. для 7 кл. общеобразовательных учреждений. – Москва : Просвещение, 1993.

10. Макарычев Ю.Н. и др. Алгебра 8 :Учеб. для 8 кл. общеобразовательных учреждений. – Москва: Просвещение, 1999.

11. Макарычев Ю.Н. и др. Алгебра 9 : Учеб. для 9 кл. общеобразовательных учреждений. – Москва : Просвещение, 1992.

12. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. Преподавание алгебры в 6 – 8 кл.: Кн. для учителя. – Москва : Просвещение, 1980.

13. Мордкович А.Г. Алгебра 8 : Учеб. для классов с углублённым изучением математики. – Москва : Мнемозина, 2004.